# 维数理论

以下所说的环均指Noether交换环.

整个维数理论均建立在以下两个交换代数定理的基础上.

定理1、定理2

定理1(局部环的维数):

(1) 设$(A,m)$为局部环,则

$$\dim A = \min\{r \mid \text{存在}r\text{个元}x_1,\cdots,x_r\in m,\ \text{存在正整数}n,\text{使得}m^n\subset(x_1,\cdots,x_r)\}$$

(2) 设$(A,m)\xrightarrow{\varphi}(B,n)$为局部环之间的局部同态

(即$\varphi: A\to B$为环同态且$\varphi(m)\subset n$),则有

$$\dim A + \dim\frac{B}{mB} \geq \dim B$$

若在上述局部同态$\varphi$下,B成为平坦A-模,则

以上不等式成为等式.

证:(1) 见Altman, kleiman《Introduction to Grothendieck Duality Theory》Theorem(1.4).

(2) 设$\dim A = d_1$, $\dim\frac{B}{mB} = d_2$. 则存在

$x_1,\cdots,x_{d_1}\in m$, $y_1,\cdots,y_{d_2}\in n$,以及正整数

$k_1,k_2$,使 $m^{k_1}\subset(x_1,\cdots,x_{d_1})$, $n^{k_2}\subset(y_1,\cdots,y_{d_2})+mB$.

从而 $n^{k_1\cdot k_2}\subset(x_1,\cdots,x_{d_1},y_1,\cdots,y_{d_2})$

再由(1)知 $\dim B\leq d_1+d_2=\dim A+\dim\frac{B}{mB}$.

若B为平坦A-代数,则going down性质成立

(见Matsumura《Commutative Ring Theory》Theorem 9.5)

由$\dim\frac{B}{mB}=d_2$,存在B中素理想降链

$n=P_0\supsetneq P_1\supsetneq\cdots\supsetneq P_{d_2}$ 且 $P_{d_2}\supseteq mB$,从而$\varphi^{-1}(P_{d_2}) = m$.

由 $\dim A = d_1$，存在 $A$ 中素理想降链：

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{q}_0 \supsetneq \mathfrak{q}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{q}_{d_1}.$$

由 going down 性质，知 $B$ 中存在素理想降链

$$\mathfrak{p}_{d_2} = \tilde{\mathfrak{q}}_0 \supseteq \tilde{\mathfrak{q}}_1 \supseteq \cdots \supseteq \tilde{\mathfrak{q}}_{d_1}$$

满足 $\varphi^{-1}(\tilde{\mathfrak{q}}_i) = \mathfrak{q}_i$，$\forall i = 0, \cdots, d_1$

~~且 $\mathfrak{p}_{d_2} \supseteq \tilde{\mathfrak{q}}_0$~~.

故由 ~~$\mathfrak{q}_i \supsetneq$~~ $\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{q}_{i+1}$，$\forall i = 0, \cdots, d_1 - 1$

知 $\mathfrak{p}_{d_2} = \tilde{\mathfrak{q}}_0 \supsetneq \tilde{\mathfrak{q}}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \tilde{\mathfrak{q}}_{d_1}$.

与前一个降链合成得到 $B$ 中素理想降链

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_{d_2} = \tilde{\mathfrak{q}}_0 \supsetneq \tilde{\mathfrak{q}}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \tilde{\mathfrak{q}}_{d_1}$$

故知 $\dim B \geq d_1 + d_2 = \dim A + \dim \frac{B}{\mathfrak{m}B}$

与前面的不等式结合即知 $\dim B = \dim A + \dim \frac{B}{\mathfrak{m}B}$. #

定理2（Noether正规化定理）：

设 $k$ 为域（不一定为代数闭域），$A$ 为有限生成 $k$-代数，$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subsetneq A$ 为 $A$ 中理想升链，则存在 $t_1, \cdots, t_m \in A$，使得 $t_1, \cdots, t_m$ 在 $k$ 上代数无关，且：

(1) $k[t_1, \cdots, t_m] \hookrightarrow A$ 为有限扩张

(2) $\forall i = 1, \cdots, n$，存在 $h_i \geq 0$ 为~~乘~~整数，满足

$$I_i \cap k[t_1, \cdots, t_m] = (t_1, \cdots, t_{h_i}), \quad \forall i = 1, \cdots, n.$$

~~证明：见~~ 其中 $h_i = 0$ 时 $(t_1, \cdots, t_{h_i}) = 0$ 为零理想.

证明：见 Altman, Kleiman《Introduction to Grothendieck Duality Theory》Theorem (2.5).

推论3：设 $A$ 为有限生成 $k$-代数，且 $A$ 为整环，

设 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m$ 为 $A$ 中饱和素理想链，

即 $\mathfrak{p}_0$ 为极小素理想，$\mathfrak{p}_m$ 为极大理想，且 $\forall i=0,\dots,m-1$，

$\mathfrak{p}_i$ 与 $\mathfrak{p}_{i+1}$ 之间不存在其它素理想.

则 $m = \dim A$.

证：由 Noether 正规化（定理2）易知 $m = \operatorname{tr.deg} K(A)$，

$K(A)$ 为 $A$ 的分式域. 故知饱和素理想长度均相同，

故为 $\dim A$. #

推论4：设 $A$ 为有限生成 $k$-代数，且 $A$ 为整环.

设 $\mathfrak{m}$ 为 $A$ 中极大理想. 则 $\dim A = \dim A_{\mathfrak{m}}$.

证：由推论3易知. #

推论5：设 $A$ 为有限生成 $k$-代数，且 $A$ 为整环.

$\mathfrak{p}$ 为 $A$ 中素理想. 则 $\dim A = \dim A_{\mathfrak{p}} + \dim A/\mathfrak{p}$.

证：由推论3易知. # 注：条件中将"$A$ 为有限生成 $k$-代数"换为"$A$ 为 ess. of finite type"结论同样成立.

定义：称 $k$-代数 $A$ 为 essentially of finite type，如果 $A$ 为一个有限生成 $k$-代数在素理想处的局部化.

推论6：设 $k$-代数 $A$ 为 essentially of finite type，~~且A~~ 记 $\mathfrak{m}$ 为 $A$ 中唯一的极大理想（特别地，$A$ 为局部环）. 设 $A$ 为整环，$0 \neq f \in \mathfrak{m}$. 则

$$\dim \frac{A}{(f)} = \dim A - 1 .$$

证：显然 $\dim \frac{A}{(f)} \le \dim A - 1$，~~设 $\mathfrak{p}$ 为 $A$ 中任一包含~~

设 $\bar{\mathfrak{p}}$ 为 $\frac{A}{(f)}$ 中任一极小素理想，$\mathfrak{p}$ 对应 $A$ 中包含 $f$ 的

素理想 $p$. 从而 $\bar{p}$ 在 $\frac{A_p}{(f)}$ 为唯一素理想. 从而 $\bar{p}$ 在 $\frac{A_p}{(f)}$ 中幂零. 在 $A_p$ 中看即为 $\exists\, n \geq 1$, s.t. $p^n \subseteq (f)$ 在 $A_p$ 中成立. 故由定理 1.(1) 知 $\dim A_p \leq 1$.

从而由推论 5 的注 知 $\dim A/p \geq \dim A - 1$. 由于 $f \in p$, 不难看到 $\dim A/(f) \geq \dim A/p \geq \dim A - 1$. 故结合前不等式

$$\dim A/(f) = \dim A - 1. \qquad \#$$

推论 7: 设 $k$-代数 $A$ 为 essentially of finite type, 且 $A$ 为正则局部环. $m$ 为 $A$ 中唯一极大理想. $f \in m$. 则 $A/(f)$ 为正则局部环 $\iff f \notin m^2$.

证: 由于正则局部环为整环. 由推论 6 知 $\dim \frac{A}{(f)} = \dim A - 1$.

而 $\frac{A}{(f)}$ 中的余切空间为

$$\frac{\frac{m}{(f)}}{\frac{m^2+(f)}{(f)}} \simeq \frac{m}{m^2+(f)} \simeq \frac{\frac{m}{m^2}}{k \cdot \bar{f}}, \quad \bar{f} \in \frac{m}{m^2} \text{ 为}$$

$f$ 的代表的类. $\kappa = A/m$ 为剩余类域.

从而 $\frac{A}{(f)}$ 中余切空间作为 $\kappa$-线性空间的维数为 $\dim_\kappa \frac{m}{m^2} - 1 \iff \bar{f} \neq 0 \in \frac{m}{m^2} \iff f \notin m^2$.

$\#$

由此知命题成立

定理 8: 设 $f \in k[x_1, \cdots, x_n]$, 且 $\sqrt{(f)} = (f)$, 即 $f$ 无重因子. $X = V(f) \subset \mathbb{A}_k^n$ 为仿射超曲面. 则 $a = (a_1, \cdots, a_n) \in X$ 为 $X$ 上正则点 $\iff$ 在 $a$ 点的各阶偏导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x=a}, \cdots, \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{x=a}$ 不全为零.

证：由推论7即得． #

定理9：设 $f\in k[X_0,\cdots,X_n]$ 为齐次多项式．$\sqrt{(f)}=(f)$，$X=V(f)\subset \mathbb{P}_k^n$ 为射影超曲面．则 $a=[a_0:a_1:\cdots:a_n]\in X$ 为 $X$ 的正则点
$\Leftrightarrow$ $f$ 在 $a$ 点的各阶偏导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial X_0}\right|_{x=a},\cdots,\left.\frac{\partial f}{\partial X_n}\right|_{x=a}$ 不全为零．

证：在仿射开集上应用定理8即得．#

定理10：设 $X$ 为不可约簇．则 $X$ 中存在非空开集 $U$，使得 $U$ 为正则簇（即 $U$ 中任一点均为正则局部环）．

证：设 $K(X)=k(x_1,\cdots,x_n)$ 为 $X$ 的有理函数域．为 $k$ 上有限生成域．由 $k=\bar{k}$．知 $K(X)$ 在 $k$ 上可分生成．即存在 $t_1,\cdots,t_m\in K(x)$ 在 $k$ 上代数无关．而 $y\in K(X)$ 在 $k(t_1,\cdots,t_m)$ 上为可分代数元，且 $K(X)=k(t_1,\cdots,t_m,y)$．

~~令 $f\in k[t_1,\cdots,t_m,Y]$ 为 $m+1$ 个变元的不可约多项式，且~~

见 Matsumura《Commutative Ring Theory》Theorem 26.2

取 $y$ 在 $k(t_1,\cdots,t_m)$ 上的极小多项式 $f\in k(t_1,\cdots,t_m)[Y]$，使得 $f\in k[t_1,\cdots,t_m][Y]$．且 $f$ 作为 $m+1$ 个变元的多项式环 $k[t_1,\cdots,t_m,Y]$ 中~~多项式~~的元素为不可约元．

考虑仿射超曲面 $Z = V(f) \subset \mathbb{A}_k^{m+1}$.

则 $\mathcal{O}_Z(Z) \simeq \dfrac{k[t_1,\cdots,t_m,Y]}{(f)}$ ~~且易验证~~ 为整环,

从而Z为不可约簇,且易验证有理函数域

$K(Z) \simeq k(t_1,\cdots,t_m,y) = K(X)$ 为 $k$-同构.

又由 $y$ 的可分性知 $\dfrac{\partial f}{\partial Y}$ 在 $\dfrac{k[t_1,\cdots,t_m,Y]}{(f)}$ 中非零.

故 $D(\frac{\partial f}{\partial Y})$ 为Z中非空开集.且由定理8可知

$D(\frac{\partial f}{\partial Y})$ 为正则簇.再由 $K(D(\frac{\partial f}{\partial Y})) \simeq K(X)$ 知

$D(\frac{\partial f}{\partial Y})$ 中非空开集 $V$,

存在 $X$ 中非空开集 $U$,存在 $D(\frac{\partial f}{\partial Y})$ 中非空开集 $V$,

使得 $U \simeq V$. 故 $U$ 为正则簇. #

定理11: 设 $X$ 为不可约簇,则 $X$ 中存在非空开集 $U$,
使得 $U$ 为正规簇 (normal variety),即 $\forall x \in U$,
$\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U,x}$ 为整闭整环.

证:由定理10,存在非空开集 $U \subseteq X$,使得 $\forall x \in U$,
$\mathcal{O}_{X,x}$ 为正则局部环,从而为UFD
(见 Matsumura《Commutative Ring Theory》Theorem 20.3
故为整闭整环. #

推论11：设 $X$ 为不可约簇，$K(X)$ 为其有理函数域，则

$\forall x \in X$，$\dim X = \dim \mathcal{O}_{X,x} = tr.deg\, K(X)$

证：由定理2不难看出.

推论12：设 $X$ 为不可约仿射簇，$f \in \mathcal{O}_X(X)$，~~则有~~ $f \neq 0$.

$\cancel{\dim V(f) \geq \dim X - 1}$.

$V(f) \subset X$ 为超曲面. 则对 $V(f)$ 的任一不可约分支 $W$，有 $\dim W = \dim X - 1$. 特别地，有 $\cancel{\dim V(f) \geq \dim X - 1}$

$\dim V(f) = \dim X - 1$.

证：设 $V(f) = W_1 \cup \cdots \cup W_n$ 为其不可约分解. $\forall i = 1, \cdots, n$.

则 $U_i = W_i - \bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} W_j$ 为 $W_i$ 中非空开集.

任取一点 $x \in U_i$，则有 $\dim W_i = \dim \mathcal{O}_{U_i,x}$

从而由推论6及其证明不易见 $\mathcal{O}_{U_i,x} \cong \dfrac{\mathcal{O}_{X,x}}{(f)}$.

难看出 $\dim \mathcal{O}_{U_i,x} = \dim \mathcal{O}_{X,x} - 1$.

再由推论11知 $\dim W_i = \dim X - 1$. #

推论13：设 $f_1, \cdots, f_r \in k[X_0, \cdots, X_n]$ 为齐次多项式.

$V(f_1, \cdots, f_r) \subset \mathbb{P}^n_k$. 则~~有~~对 $V(f_1, \cdots, f_r)$ 的任一不可约

分支 $W$，有 $\dim \overset{W}{\cancel{V(f_1, \cdots, f_r)}} \geq n - r$.

证：由推论11知 $\dim \mathbb{P}^n_k = n$. 再由推论12即得. #

下面的两个定理是关于纤维的维数的基本性质.

定理14: 设 $f: X \to Y$ 为不可约簇之间的 dominant 态射, $y \in Y$ 且 $f^{-1}(y)$ 非空. 则对 $f^{-1}(y)$ 的任一不可约分支 $W$ 有 $\dim W \geq \dim X - \dim Y$.

证: 由 $f$ 为 dominant 知 $f$ 诱导有理函数域的嵌入

$$K(Y) \hookrightarrow K(X).$$

从而 $\dim Y = \mathrm{tr.deg}\, K(Y) \leq \mathrm{tr.deg}\, K(X) = \dim X$.

不难看出我们可设 $X, Y$ 均为仿射簇.

令 $B = \mathcal{O}_X(X)$, $A = \mathcal{O}_Y(Y)$, 记 $F = f^{-1}(y) = W \cup W_2 \cup \cdots \cup W_l$ 为纤维 $F$ 的不可约分解. 取 $x \in W$, 满足 $x \notin W_2 \cup \cdots \cup W_l$

则 $\dim W = \dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim \mathcal{O}_{F,x}$

设 $x$ 对应 $B$ 中极大理想 $n$, $y$ 对应 $A$ 中极大理想 $m$. 则易知 $F = V(mB)$, 且 $mB \subset n$.

从而 $\mathcal{O}_F(F) = \dfrac{B}{\sqrt{mB}}$. 而由 $F$ 为仿射簇,

$\mathcal{O}_{F,x} = \left(\dfrac{B}{\sqrt{mB}}\right)_n$, 以及 $\mathcal{O}_{X,x} = B_n$, $\mathcal{O}_{Y,y} = A_m$.

从而 $\dim \mathcal{O}_{F,x} = \dim \left(\dfrac{B}{\sqrt{mB}}\right)_n = \dim \dfrac{B_n}{mB_n}$

$\geq \dim B_n - \dim A_m = \dim \mathcal{O}_{X,x} - \dim \mathcal{O}_{Y,y}$

$= \dim X - \dim Y$.

上面的不等式是由定理1, (2) 得到. #

定理15：设 $f: X \to Y$ 为不可约簇之间的dominant态射，则$Y$中存在非空开子集$U$，使得 $U \subset f(X)$，且 $\forall y \in U$，对任意 $f^{-1}(y)$的不可约分支$W$，有

$$\dim W = \dim X - \dim Y.$$

证：不难看出可设$Y$为仿射簇，再取$X$的一个有限仿射开覆盖，通过对其中每个仿射开子集讨论可看出我们可假设$X, Y$均为仿射簇。在这个假设下，设 $A = \mathcal{O}_Y(Y)$，$B = \mathcal{O}_X(X)$，则$A, B$均为整环，且为有限生成$k$-代数，且$f$诱导单同态 $A \hookrightarrow B$。由Noether正规化定理，$A$中存在非零元 $f_1 \in A$，使得 $B_{f_1}$中存在 $t_1, \cdots, t_\alpha \in B_{f_1}$ 在$A$的分式域$K(A)$上代数无关，且 $A_{f_1}[t_1, \cdots, t_\alpha] \hookrightarrow B_{f_1}$ 为有限扩张。故通过考虑主开集 $D(f_1) \subset Y$ 和 $f^{-1}(D(f_1)) \subset X$，我们可假设仿射簇$X, Y$的正则函数环$B, A$满足：$B$中存在在$A$的分式域上代数无关的元 $t_1, \cdots, t_\alpha$，使得 $C = A[t_1, \cdots, t_\alpha] \hookrightarrow B$ 为有限扩张。由定理11，还可假设$A$为整闭整环。

任取$Y$中点$y$，设其对应$A$中极大理想$m$，则 $f^{-1}(y) = V(mB)$。由于 $C/mC \simeq A/m\,[t_1, \cdots, t_\alpha]$ 为域 $\kappa = A/m$ 上$\alpha$个变量的多项式环，从而

$$\dim \frac{C}{mC} = \alpha.$$

通过考察在 $k$ 上的超越维数，不难看到

$$\mathrm{tr.deg}\, K(B) = \mathrm{tr.deg}\, K(C) = \mathrm{tr.deg}\, K(A) + \alpha.$$

从而得到 $\dim X = \dim Y + \alpha$.

又由于 $C \hookrightarrow B$ 为单的有限扩张，任取 $C$ 的包含 $mC$ 的极大理想 $m_1$，均有 $B$ 中极大理想 $m_2$ 使得 $m_2 \cap C = mC$，故 $f^{-1}(y) = V(mB)$ 非空.

任取 $f^{-1}(y)$ 的不可约分支 $W$，设 $W = V(p)$，则 $p$ 为 $B$ 中包含 $mB$ 的极小素理想（即 $p \supset mB$，且在 $B/mB$ 中 $p$ 为极小素理想），从而 $p \cap C \supseteq mB \cap C \supseteq mC$

由于 $C = A[t_1, \cdots, t_\alpha]$ 为 $A$ 上多项式环，且 $A$ 为整闭整环，故 $C$ 为整闭整环. 且 $mC$ 为 $C$ 中素理想.

若 $p \cap C \supsetneq mC$，则由 $C \hookrightarrow B$ 为有限扩张，$C$ 为整闭整环，$B$ 为整环，going down 性质成立，从而存在 $B$ 中素理想 $q \subsetneq p$，且 $q \cap C = mC$. 这与 $p$ 的极小性矛盾. 故 $p \cap C = mC$，从而 $C/mC \hookrightarrow B/p$ 为单的有限扩张，由going up 性质可得到

$$\dim B/p = \dim C/mC$$

而由 $W = V(p)$ 知 ~~dim~~ $\mathcal{O}_W(W) = B/p$. 故

$$\dim W = \dim B/p = \dim C/mC = \alpha = \dim X - \dim Y.$$

#

注：由证明过程可看到，如下更一般的定理成立：设 $f: X \to Y$ 为不可约簇间的 dominant 态射，则 $Y$ 中存在非空开子集 $U$，使得对 $Y$ 中任意不可约闭子集 $Z$，对 $f^{-1}(Z)$ 的任意不可约分支 $W$，若 $W \cap f^{-1}(U) \neq \phi$，则 $\dim W = \dim Z + \dim X - \dim Y$.

定理16: 设 $f: X \to Y$ 为不可约簇之间的 dominant 态射, 设 $f$ 为平坦态射 (即 $\forall x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ 为 $\cancel{\mathcal{O}_{Y,f(x)}}$ 平坦 $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-模), 则 $\forall y \in Y$, 若 $f^{-1}(y)$ 非空, 则对 $f^{-1}(y)$ 的任一不可约分支 $W$, 有

$$\dim W = \dim X - \dim Y.$$

证: 取 $x \in W$ 使得 $x$ 不在 $f^{-1}(y)$ 的其它不可约分支上. 则 $\mathcal{O}_{W,x} \simeq \mathcal{O}_{f^{-1}(y),x}$. 通过取 $x, y$ 的仿射开邻域可假设 $X, Y$ 均仿射. 再由定理1.(2) 即知 $\dim \mathcal{O}_{f^{-1}(y),x} = \dim \mathcal{O}_{X,x} - \dim \mathcal{O}_{Y,y}$, 因 $\mathcal{O}_{X,x}$ 为平坦 $\mathcal{O}_{Y,y}$-模.

故 $\dim W = \dim X - \dim Y$. #